

旋转矩阵

简介

https://blog.csdn.net/weixin_45632220/article/details/117735223

https://blog.csdn.net/weixin_44097528/article/details/122182393

旋转矩阵的意义可以从两个角度来描述

1. 坐标变换
2. 旋转向量

为方便下文表述，在此处先作如下定义：

$\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ 代表在 A 坐标系下各个坐标方向的单位方向向量

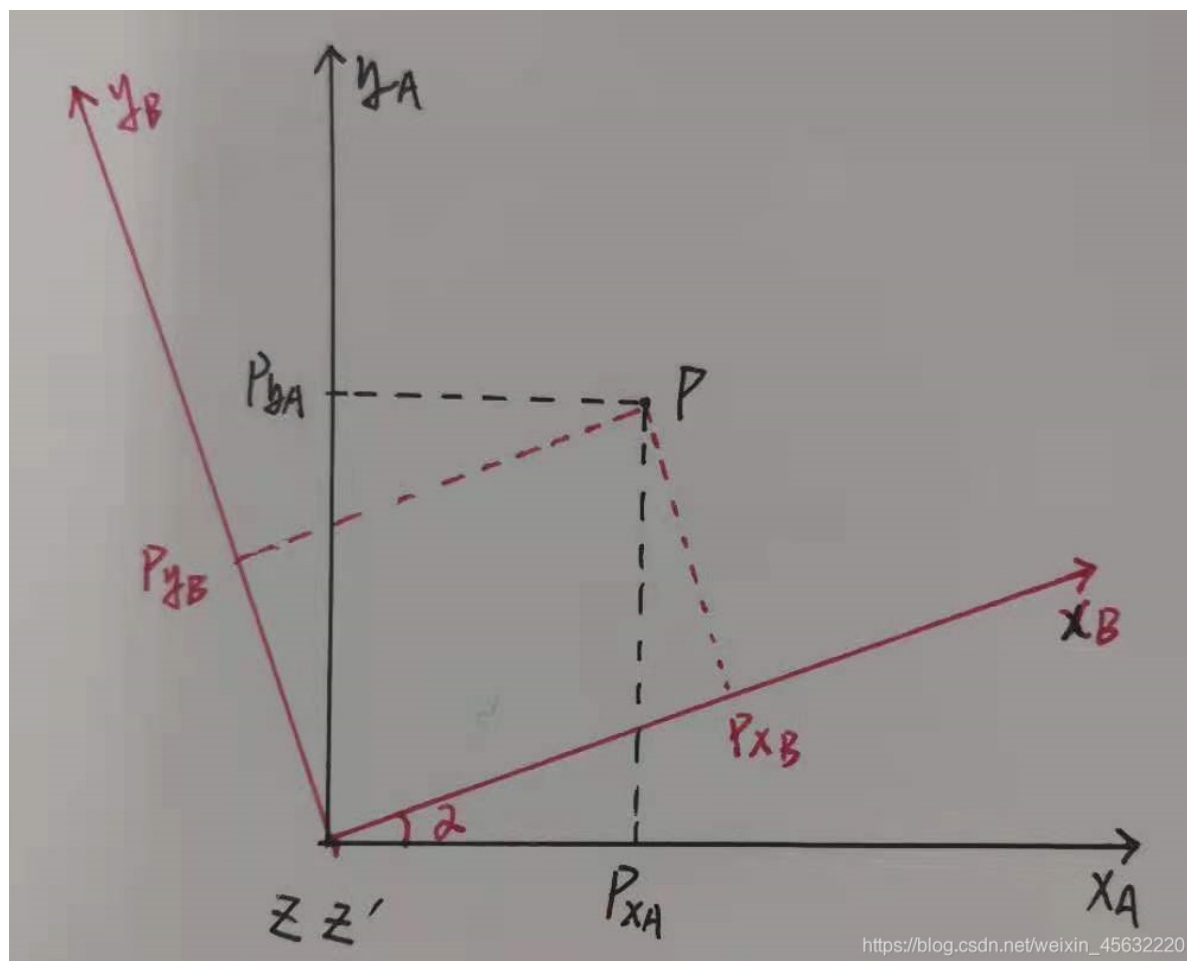
$\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B$ 代表在 B 坐标系下各个坐标方向的单位方向向量

p_{xA}, p_{yA}, p_{zA} 代表 p 点在 A 坐标系中各个坐标轴上的分量大小

p_{xB}, p_{yB}, p_{zB} 代表 p 点在 B 坐标系中各个坐标轴上的分量大小

坐标变换

由于三维的坐标变换的几何表达不容易描述，而二维的几何表达方便描述，因此，此处借用二维的推导推广到三维的表达



这里初始坐标系在左边，最终坐标系在右边

其坐标变换的关系如下：

$$p_{xA} = p_{xB} \cos \alpha - p_{yB} \sin \alpha$$

$$p_{yA} = p_{xB} \sin \alpha + p_{yB} \cos \alpha$$

$$p_{zA} = p_{zB}$$

转换为矩阵表达即

$$\begin{bmatrix} p_{xA} \\ p_{yA} \\ p_{zA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{xB} \\ p_{yB} \\ p_{zB} \end{bmatrix}$$

经过观察得到，根据图中几何关系写出的旋转矩阵，其**列向量恰好为旋转后坐标系（红色）的坐标轴在旋转前坐标系（黑色）中的方向余弦**，有了这种思想之后，我们可以**推广**得到坐标系B相对于坐标系A的旋转矩阵

$$\begin{bmatrix} p_{xA} \\ p_{yA} \\ p_{zA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{X}_B \cdot \vec{X}_A & \vec{Y}_B \cdot \vec{X}_A & \vec{Z}_B \cdot \vec{X}_A \\ \vec{X}_B \cdot \vec{Y}_A & \vec{Y}_B \cdot \vec{Y}_A & \vec{Z}_B \cdot \vec{Y}_A \\ \vec{X}_B \cdot \vec{Z}_A & \vec{Y}_B \cdot \vec{Z}_A & \vec{Z}_B \cdot \vec{Z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{xB} \\ p_{yB} \\ p_{zB} \end{bmatrix}$$

这里的向量代表的是客观上的向量

实际计算时，如下

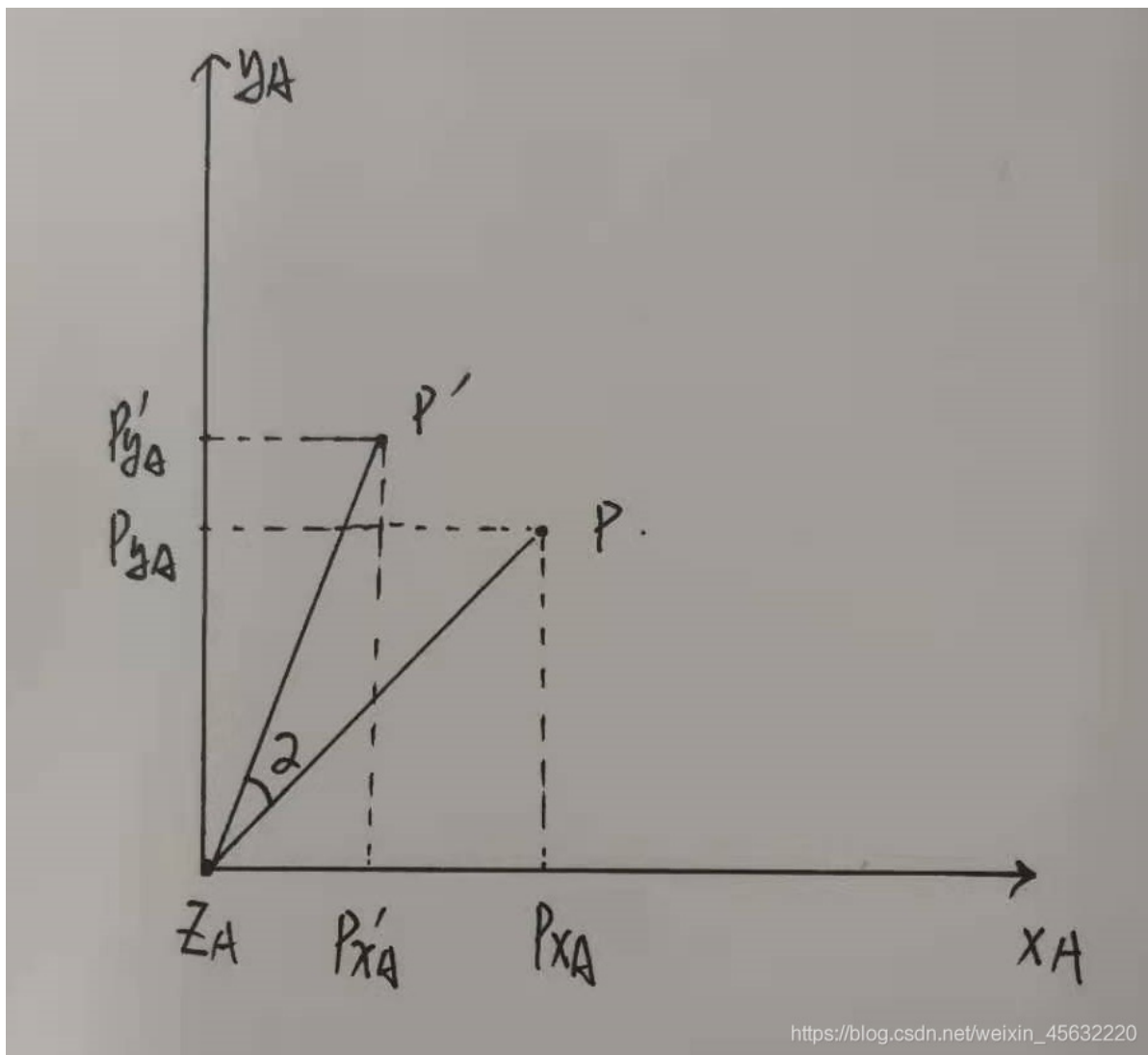
$$p_{xA} = p_{xB} \cdot \overrightarrow{XB \cdot XA} + p_{yB} \cdot \overrightarrow{YB \cdot XA} + p_{zB} \cdot \overrightarrow{ZB \cdot XA}$$

$$p_{yA} = (p_{xB} \cdot \overrightarrow{XB} + p_{yB} \cdot \overrightarrow{YB} + p_{zB} \cdot \overrightarrow{ZB}) \cdot \overrightarrow{XA}$$

$$p_{xA} = \overrightarrow{p_B} \cdot \overrightarrow{XA}$$

https://blog.csdn.net/weixin_45632220

向量旋转



经过几何计算可以发现，这个旋转矩阵与上面坐标变换时是一样的（这里是**初始点P在右边，最终点P'在左边**）。类似的，我们可以写出三维坐标系下的向量表达结果

$$\begin{bmatrix} p'_{xA} \\ p'_{yA} \\ p'_{zA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{X}_B \cdot \vec{X}_A & \vec{Y}_B \cdot \vec{X}_A & \vec{Z}_B \cdot \vec{X}_A \\ \vec{X}_B \cdot \vec{Y}_A & \vec{Y}_B \cdot \vec{Y}_A & \vec{Z}_B \cdot \vec{Y}_A \\ \vec{X}_B \cdot \vec{Z}_A & \vec{Y}_B \cdot \vec{Z}_A & \vec{Z}_B \cdot \vec{Z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{xA} \\ p_{yA} \\ p_{zA} \end{bmatrix}$$

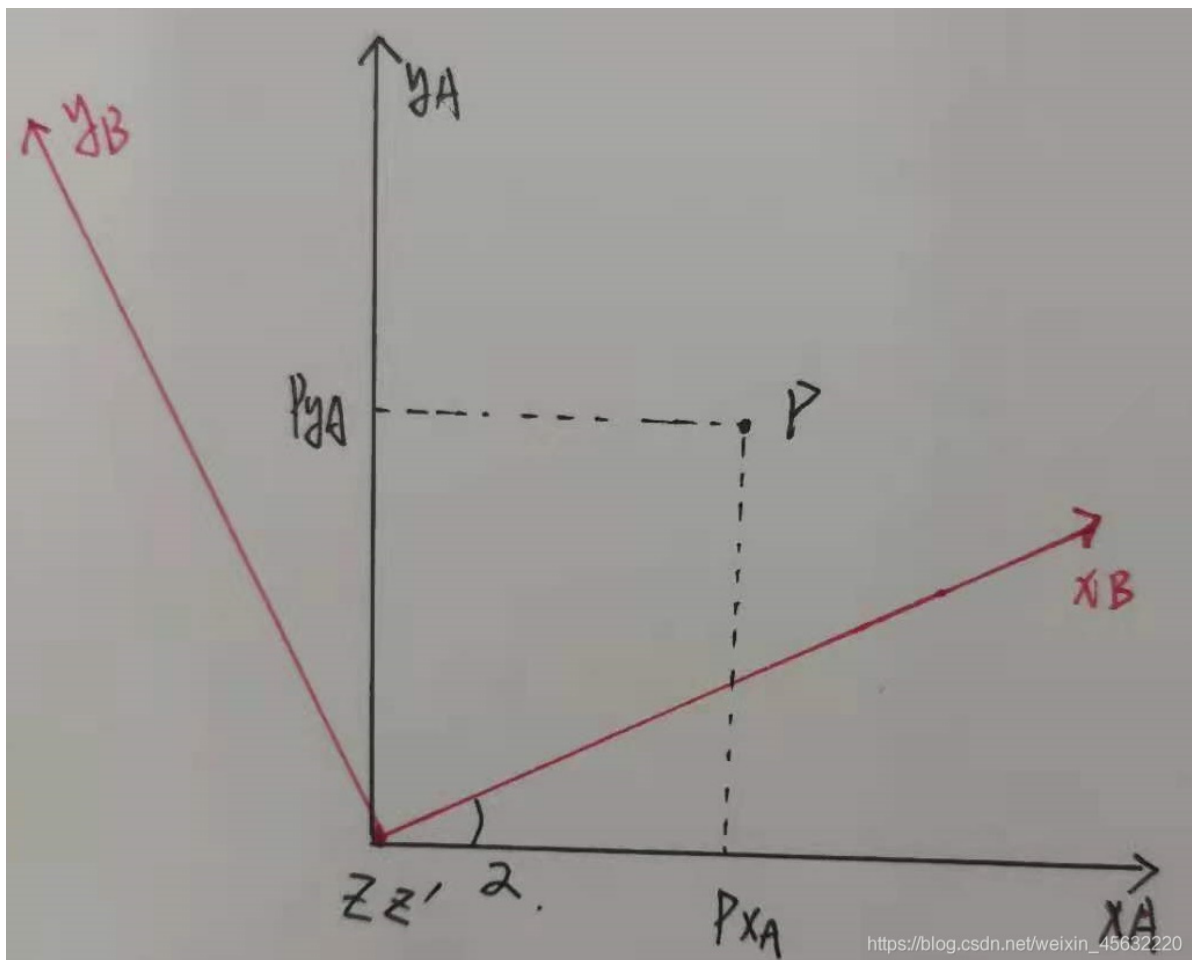
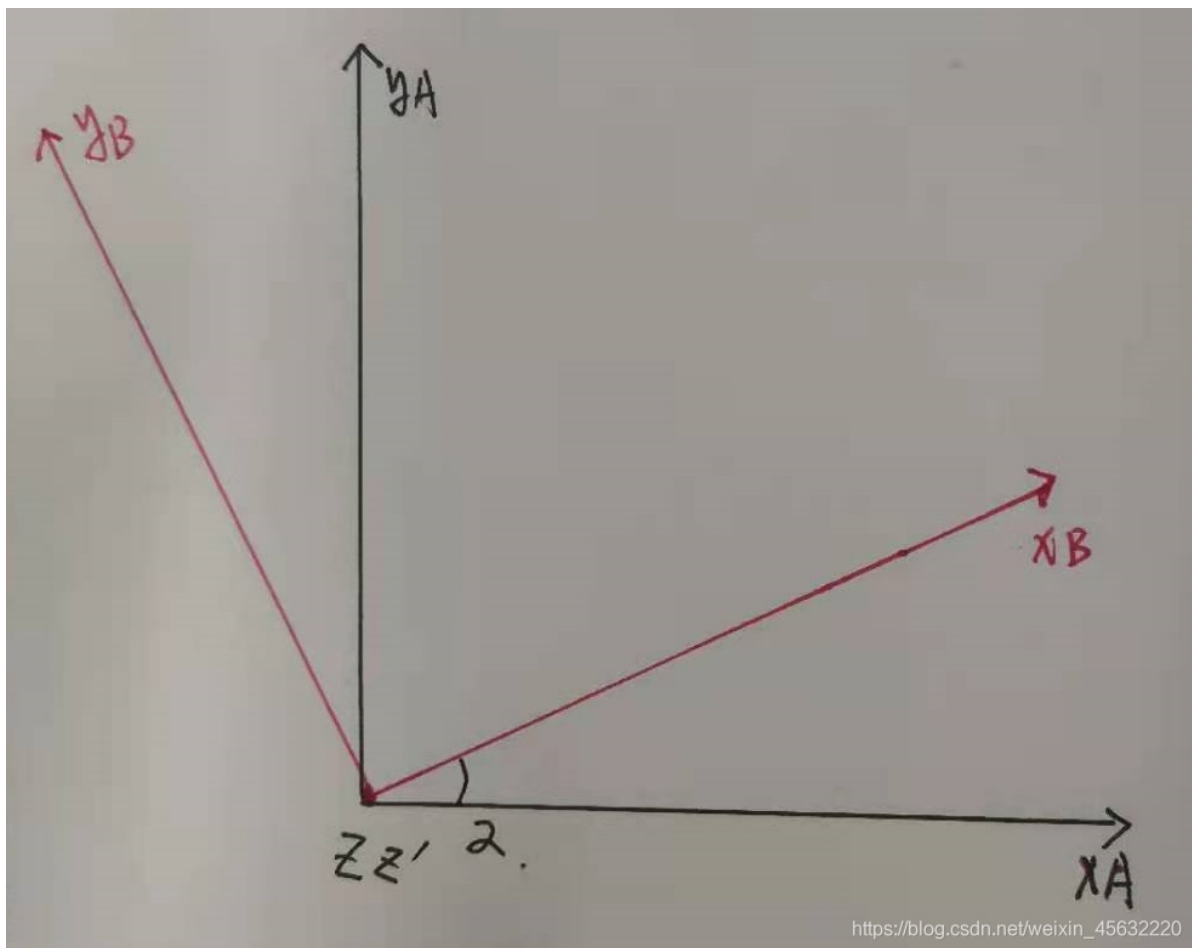
实际计算时，如下：

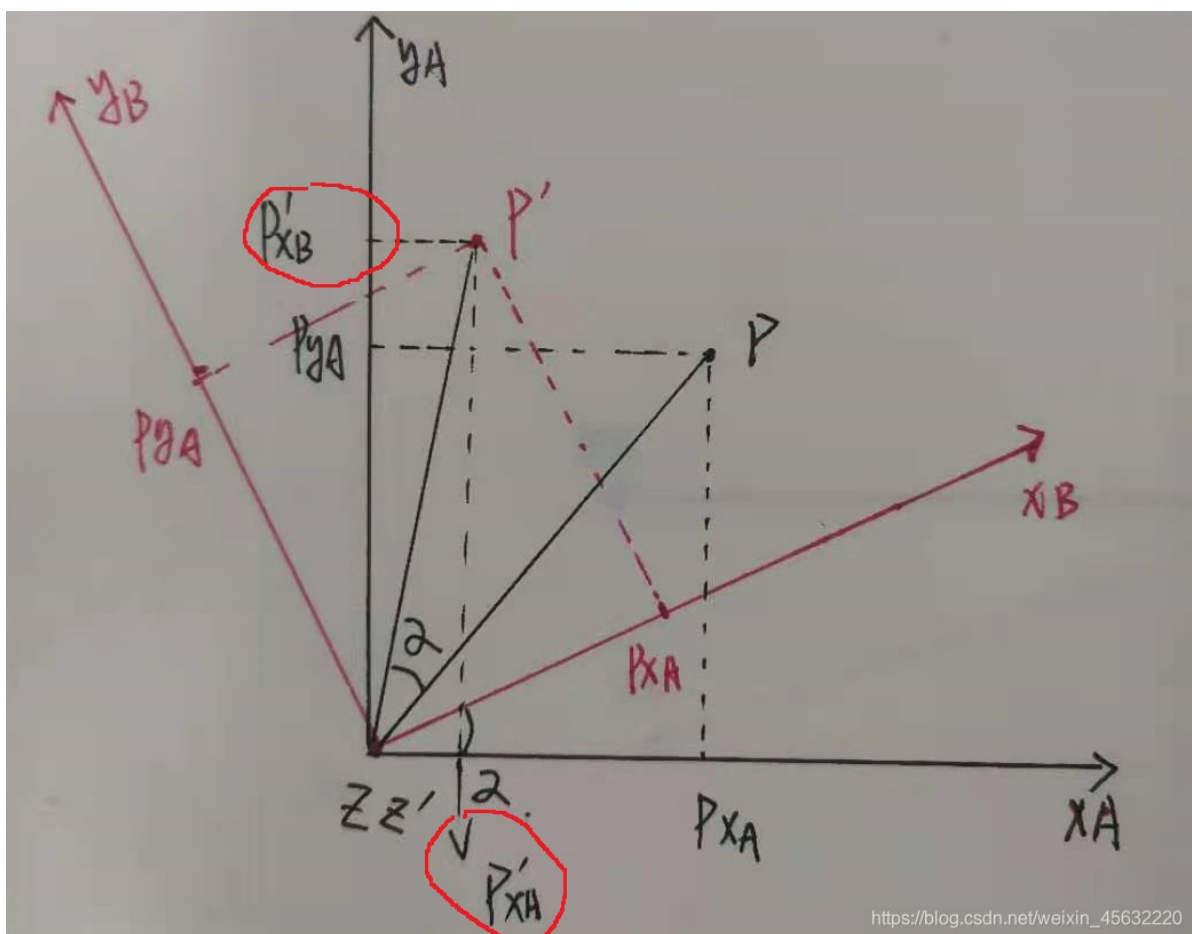
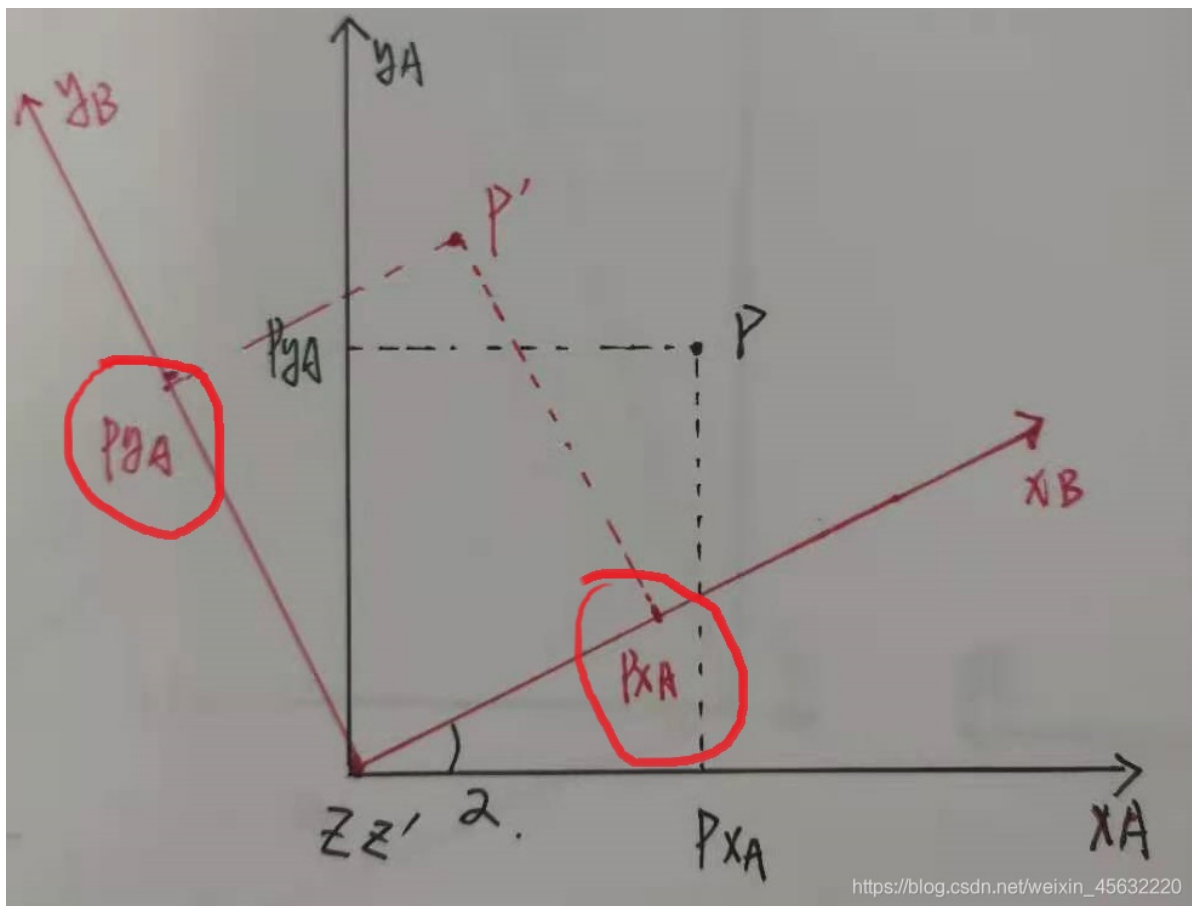
$$p_{xA}' = p_{xA} \cdot \overrightarrow{XB} \cdot \overrightarrow{XA} + p_{yA} \cdot \overrightarrow{YB} \cdot \overrightarrow{XA} + p_{zA} \cdot \overrightarrow{ZB} \cdot \overrightarrow{XA}$$

$$p_{xA}' = \boxed{(p_{xA} \cdot \overrightarrow{XB} + p_{yA} \cdot \overrightarrow{YB} + p_{zA} \cdot \overrightarrow{ZB})} \cdot \overrightarrow{XA}$$

https://blog.csdn.net/weixin_45632220

蓝框中表示坐标系B中的一个向量，不过该向量的坐标与坐标系A中的向量坐标相同





意思就是旋转坐标系后相同坐标点的向量就相当于原来的向量在原来的坐标系下旋转了一定角度

三维空间的旋转矩阵

$$\begin{aligned}
 \text{绕}x\text{轴, } x\text{值不变} \quad R_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\
 \text{绕}y\text{轴, } y\text{值不变} \quad R_y &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \\
 \text{绕}z\text{轴, } z\text{值不变} \quad R_z &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

1. 三个旋转矩阵轮换对称的（整体向右移一列，整体向下移一行）
2. 逆时针旋转 θ 度

矩阵的左右乘

左乘旋转矩阵绕固定坐标系旋转，右乘旋转矩阵绕自身坐标系旋转

含义具体是：

1. 多次旋转时用到的多个旋转矩阵，这些旋转矩阵的组合方式是左乘还是右乘。总体而言都是乘在向量的左边的。
2. 绕固定坐标系旋转讨论的是向量的旋转，绕自身坐标系旋转讨论的是坐标变换（坐标系旋转）

左乘

例子：想要一个向量 p_0 先绕 x 轴转 α 度，再绕 y 轴转 β 度，最后绕 z 轴转 γ 度，求旋转后向量的位置。

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_1 &= M_x(\alpha) \times \vec{p}_0 \\
 \vec{p}_2 &= M_y(\beta) \times \vec{p}_1 \\
 \vec{p}_3 &= M_z(\gamma) \times \vec{p}_2
 \end{aligned}$$

总的旋转矩阵为

$$R = M_z(\gamma)M_y(\beta)M_x(\alpha)$$

右乘

例子：已知在 C 坐标系下表示的向量 p_C ，我想求 p_C 在原始坐标系 O 下的表示 p_0 ，已知 C 坐标系由原始坐标系 O 绕轴 X_0 旋转 α 度成为坐标系 A ，再绕轴 Y_A 旋转成为坐标系 B ，再绕轴 Z_B 旋转成为坐标系 C 。

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_B &= M_{Z_B} \vec{p}_C \\
 \vec{p}_A &= M_{Y_A} \vec{p}_B \\
 \vec{p}_0 &= M_{X_0} \vec{p}_A
 \end{aligned}$$

总的旋转矩阵为

$$R = M_{X_0}M_{Y_A}M_{Z_B}$$

缩放变换

x, y, z 坐标分别缩放了 $Scale(x), Scale(y), Scale(z)$

$$S = \begin{bmatrix} Scale(x) & 0 & 0 \\ 0 & Scale(y) & 0 \\ 0 & 0 & Scale(z) \end{bmatrix}$$

1. 对坐标系而言（系动点不动）

缩放指的是缩放各坐标轴基向量的模长，即：如果坐标轴单位放大Scale倍，那么点 x, y, z 的值就要缩小Scale倍。

2. 对坐标而言（点动系不动）

单纯的点 x, y, z 的扩大（缩小）倍数

平移变换

引入齐次变换矩阵

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & Translation(x) \\ 0 & 1 & 0 & Translation(y) \\ 0 & 0 & 1 & Translation(z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 对坐标系而言（系动点不动）

- 如果系向左（x轴负方向）/后（y轴负方向）/下（z轴负方向）平移，那么T矩阵中的 $Translation(x), Translation(y), Translation(z)$ 为负；
- 如果系向右（x轴正方向）/前（y轴正方向）/上（z轴正方向）平移，那么T矩阵中的 $Translation(x), Translation(y), Translation(z)$ 为正。

2. 对坐标而言（点动系不动）

与第一点相反

- 如果点向左（x轴负方向）/后（y轴负方向）/下（z轴负方向）平移，那么T矩阵中的 $Translation(x), Translation(y), Translation(z)$ 为负；
- 如果点向右（x轴正方向）/前（y轴正方向）/上（z轴正方向）平移，那么T矩阵中的 $Translation(x), Translation(y), Translation(z)$ 为正。

注意我们在这里的考虑方式

- 如果是坐标变换（系动点不动），那么我们用的是右乘，用的是转换后坐标系表示原来的坐标系
- 如果是向量旋转（系不动点动），那么我们用的是左乘，用的是原来的点表示新的点

补充

1. 为什么二维旋转可以交换？

- 在三维旋转中先绕x旋转，在绕y旋转和先绕y旋转，在绕x旋转肯定是不一样的，具体看图。那我们在二维旋转中先转90°再转45°肯定和先转45°再转90°是一样的。究其根本，是二维旋转它首先就隐藏了一个非常重要的因素，**就是旋转轴永远是垂直于二维平面的，也是固定的，在二维中无论怎么旋转，都是共面的**
- 放到三维空间，旋转之所以存在次序性，之所以不能交换，是旋转轴可以跟向量成任意角度。如果你放到一个二维子空间里面去旋转，你依然可以满足交换性。

$$A = \text{rotation } 90^\circ$$

$$B = \text{rotation } 90^\circ$$

$B \cdot A \cdot \text{object}$

$A \cdot B \cdot \text{object}$

