

最大面内切应力的推导

类似的，对**最大切应力**(主切应力)及其作用平面有极值条件

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)(\cos 2\theta) - 2\tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

极值 θ_s — **最大切应力方向** (主剪切方向) 满足方程

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}, \quad \tau_{xy} \neq 0$$

- ① 两个根: $\theta_{s_1}, \theta_{s_2}$ —— 相差 90° , 即 $\theta_{s_2} = \theta_{s_1} \pm \frac{\pi}{2}$

例: 若一个位于 $[0, \frac{\pi}{2}]$, 则另一个位于 $[\frac{\pi}{2}, \pi)$ 或 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$

- ② θ_p 与 θ_s : $\tan 2\theta_s = -\frac{1}{\tan 2\theta_p} = -\cot 2\theta_p = \tan(2\theta_p \pm \frac{\pi}{2})$

$$2\theta_s - 2\theta_p = \pm 90^\circ \longrightarrow \theta_s = \theta_p \pm 45^\circ$$

最大切应力方向与主方向相差 45°

τ 的极值与角度 θ_s 及对应的 σ

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta; \quad \tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

- ① 切应力极值: $\tau_{\max} = R, \quad \tau_{\min} = -R$

满足 $\tan 2\theta_s$ 方程的 $\cos 2\theta_{s_1} = \frac{\tau_{xy}}{R}, \quad \sin 2\theta_{s_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$

给出 $\tau_{x'y'} = R > 0$ —— 最大切应力。使以上两方程反号的 θ_{s_2} 给出 $\tau_{x'y'} = -R < 0$ —— 最小切应力。

- ② 对应的正应力: $\sigma|_{\theta_{s_{1,2}}} = \sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$

将 θ_s 的条件代入 $\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$

- ③ θ_{s_1} 与 θ_{p_1} 的关系: $\theta_{s_1} = \theta_{p_1} - 45^\circ$ 从 θ_{p_1} 顺时针旋转 45°

回顾 θ_{p_1} 条件: $\cos 2\theta_{p_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}, \quad \sin 2\theta_{p_1} = \frac{\tau_{xy}}{R}$

由 $\sin 2\theta_{p_1} = \cos 2\theta_{s_1}$ 及 $\cos 2\theta_{p_1} = -\sin 2\theta_{s_1}$ 可证。

最大面内切应力结果汇总

$$\tau_{\text{in-plane}}^{\max}|_{\theta_{s_1}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\tau_{\text{in-plane}}^{\min}|_{\theta_{s_2}} = -R$$

$$\sigma|_{\theta_{s_{1,2}}} = \sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\cos 2\theta_{s_1} = \frac{\tau_{xy}}{R}, \quad \sin 2\theta_{s_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

$$\cos 2\theta_{s_2} = -\frac{\tau_{xy}}{R}, \quad \sin 2\theta_{s_2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

$$\theta_{s_2} = \theta_{s_1} \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_{s_1} = \theta_{p_1} - 45^\circ$$

面内切应力极值的特征

- ① 切应力的两极值大小相同，符号相反

$$\tau_{\max} = -\tau_{\min} = R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

- ② 变换公式给出的切应力数值需在局部坐标系中解释
- ③ 代数值的物理解释与切应力互等定理一致
- ④ 关于在应力单元上的表示
需检查切应力的箭头指向(头对头，尾对尾)