

四元数

<https://www.qiujiawei.com/understanding-quaternions/#4.11>

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/566217605>

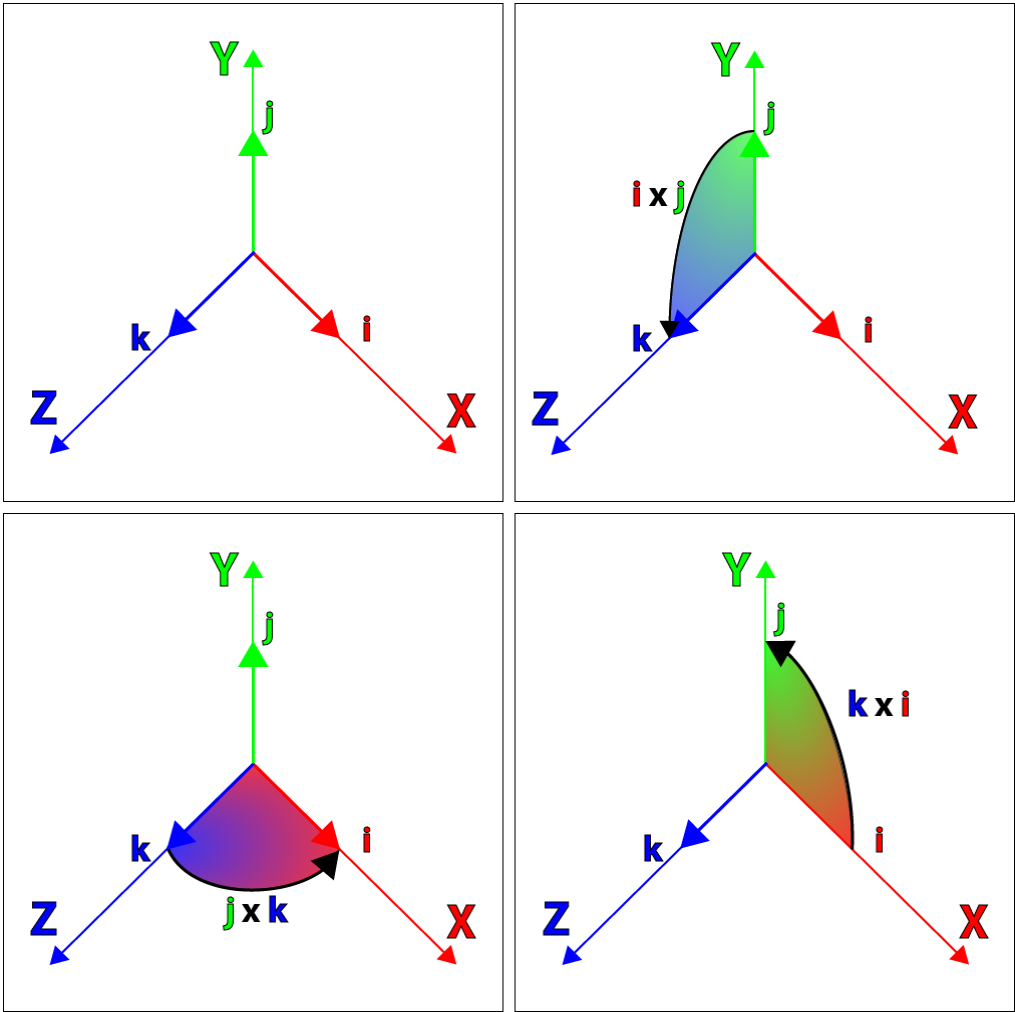
<https://zhuanlan.zhihu.com/p/27541307>

在复数系统中额外增加两个虚数到复数系统，从而把在复平面上的概念拓展到三维空间

基础

$$\begin{aligned} q &= s + xi + yj + zk \quad s, x, y, z \in \mathbb{R} \\ i^2 &= j^2 = k^2 = ijk = -1 \\ ij &= k \quad jk = i \quad ki = j \\ ji &= -k \quad kj = -i \quad ik = -j \end{aligned}$$

非常类似于直角坐标系中各轴单位向量的叉乘的规则，于是我们可以用 i, j, k 三个虚数表达一个直角坐标系，且仍然保持虚数的性质



四元数可以通过序对的形式表示：

$$q = [s, \mathbf{v}] = [s, xi + yj + zk] = s + xi + yj + zk \quad s, x, y, z \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

实四元数——虚部向量为零向量的四元数：

$$q = [s, \mathbf{0}]$$

纯四元数：

$$q = [0, \mathbf{v}] = 0 + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

四元数的系数缩放

$$\begin{aligned} \text{若 } q &= [s, \mathbf{v}] \\ \text{则 } \lambda q &= \lambda[s, \mathbf{v}] = [\lambda s, \lambda \mathbf{v}] \end{aligned}$$

单位四元数

由向量的性质，我们可以知道任意一个向量可以表示为该方向的单位方向向量与其模长的乘积

$$q = [s, \mathbf{v}] = [s, v\tilde{\mathbf{v}}]$$

单位四元数即

$$\tilde{q} = [0, \tilde{\mathbf{v}}]$$

四元数的二元表达形式

$$\begin{aligned} q = [s, \mathbf{v}] &= [s, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{v}] = s + v[0, \tilde{\mathbf{v}}] \\ &= s + v\tilde{\mathbf{q}} \end{aligned} \tag{2}$$

共轭四元数

$$\begin{aligned} \text{若 } q &= [s, \mathbf{v}] \\ \text{则 } q^* &= [s, -\mathbf{v}] \\ qq^* &= [s, \mathbf{v}][s, -\mathbf{v}] \\ &= [ss + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, -s\mathbf{v} + s\mathbf{v} - \mathbf{v} \times \mathbf{v}] \\ &= [s^2 + \mathbf{v}^2, \mathbf{0}] \end{aligned}$$

四元数的范数

$$\begin{aligned} |q| &= \sqrt{s^2 + \mathbf{v}^2} \\ qq^* &= |q|^2 \end{aligned}$$

四元数的规范化

$$\frac{q}{\sqrt{s^2 + \mathbf{v}^2}} = \frac{q}{|q|}$$

四元数的逆

定义为 $q^{-1}q = qq^{-1} = [1, 0] = 1$

两侧同时左乘或右乘 q^* 可得

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$$

四元数的计算

$$q_a = [s_a, \mathbf{a}]$$

$$q_b = [s_b, \mathbf{b}]$$

$$\mathbf{i} = [0, \mathbf{i}] \quad \mathbf{j} = [0, \mathbf{j}] \quad \mathbf{k} = [0, \mathbf{k}] \quad 1 = [1, \mathbf{0}]$$

1. 加减法

$$q_a \pm q_b = [s_a \pm s_b, \mathbf{a} \pm \mathbf{b}]$$

2. 乘法

$$\begin{aligned} q_a q_b &= [s_a, \mathbf{a}][s_b, \mathbf{b}] = (s_a + x_a \mathbf{i} + y_a \mathbf{j} + z_a \mathbf{k})(s_b + x_b \mathbf{i} + y_b \mathbf{j} + z_b \mathbf{k}) \\ &= (s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b)[1, \mathbf{0}] \\ &\quad + (s_a x_b + s_b x_a + y_a z_b - y_b z_a)[0, \mathbf{i}] \\ &\quad + (s_a y_b + s_b y_a + z_a x_b - z_b x_a)[0, \mathbf{j}] \\ &\quad + (s_a z_b + s_b z_a + x_a y_b - x_b y_a)[0, \mathbf{k}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_a q_b &= [(s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b), \\ &\quad s_a(x_b \mathbf{i} + y_b \mathbf{j} + z_b \mathbf{k}) + s_b(x_a \mathbf{i} + y_a \mathbf{j} + z_a \mathbf{k}) \\ &\quad + (y_a z_b - y_b z_a) \mathbf{i} + (z_a x_b - z_b x_a) \mathbf{j} + (x_a y_b - x_b y_a) \mathbf{k}] \end{aligned}$$

整理可得（其中的点乘和叉乘是普通向量的点乘和叉乘）

$$q_a q_b = [s_a s_b - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, s_a \mathbf{b} + s_b \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}]$$

3. 点乘

$$q_a \cdot q_b = s_a s_b + x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

四元数之间的角度差

$$\cos \theta = \frac{s_a s_b + x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|q_a| |q_b|}$$

这里的角度是根据点乘的定义推广得到的，不是根据几何直观得到的（我的暂时理解）

旋转四元数

绕着单位向量 $\tilde{e}$ 旋转角度为 θ ，则表示该旋转的单位四元数为 $q = [\cos \frac{1}{2}\theta, \sin \frac{1}{2}\theta \tilde{e}]$

具体旋转需要左乘单位四元数并右乘这个四元数的逆（同时也是共轭）

$$\begin{aligned} &\text{对于要旋转的 } \vec{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \text{ 围绕 } \tilde{\mathbf{v}} \text{ 旋转 } \theta \text{ 表示为} \\ \vec{k} q q^{-1} &= [\cos \frac{1}{2}\theta, \sin \frac{1}{2}\theta \tilde{\mathbf{v}}] \vec{k} [\cos \frac{1}{2}\theta, -\sin \frac{1}{2}\theta \tilde{\mathbf{v}}] \end{aligned}$$

经过上述的计算所得的结果中实部为0，得到的是纯四元数，可以转为三维坐标，其虚部的三个分量表示旋转后的三维点的坐标

直接用 $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ 来计算, 可以得到

$$\begin{aligned} q\vec{v}q^{-1} &= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)(xi + yj + zk)(q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k) \\ &= [x(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) + 2y(q_1 q_2 - q_0 q_3) + 2z(q_0 q_2 + q_1 q_3)]i \\ &\quad + [2x(q_0 q_3 + q_1 q_2) + y(q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) + 2z(q_2 q_3 - q_0 q_1)]j \\ &\quad + [2x(q_1 q_3 - q_0 q_2) + 2y(q_0 q_1 + q_2 q_3) + z(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)]k \end{aligned}$$

写成矩阵形式可以得到

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) + 2y(q_1 q_2 - q_0 q_3) + 2z(q_0 q_2 + q_1 q_3) \\ 2x(q_0 q_3 + q_1 q_2) + y(q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) + 2z(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2x(q_1 q_3 - q_0 q_2) + 2y(q_0 q_1 + q_2 q_3) + z(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) \\ 2(q_0 q_3 + q_1 q_2) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中的矩阵就是对应的旋转矩阵, 只需要把

$$q_0 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), q_1 = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e_1, q_2 = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e_2, q_3 = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e_3$$

代入即可直接用转轴 $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ 和转角 α 来表示出旋转矩阵。